Es. 1 Sia $X \in Lie(G) = T_{I_m} G$.

Allora $\alpha : t \mapsto e^{tX}$ è una curva C^∞ in G con $\alpha(0) = I_m$, $\alpha'(0) = X$.

Inoltre

$$(\varphi \circ \alpha)(t) = \varphi(\alpha(t)) = \varphi(e^{tX}) = e^{t\, d\varphi(X)}$$

è l'immagine della curva tramite φ, e vale

$(\varphi \circ \alpha)'(0) = d\varphi(X) \in Lie(H) = T_{I_m} H$

Quindi $d\varphi(X)$ è l'immagine di X tramite il differenziale "tradizionale" di φ come appl. C^∞.

Es. 2: $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ è invertibile se e solo se A e C sono invertibili. Quindi $(A, B, C) \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ è un omeomorfismo $GL(m, \mathbb{C}) \times M_{m \times (n-m)}(\mathbb{C}) \times GL(n-m, \mathbb{C}) \to P$.

Il dominio è connesso, quindi P è connesso.

Dim. che $\mathfrak{p} = Lie(P)$. Si può dimostrare in modo simile all'uguaglianza $\mathfrak{b}(n) = Lie(B(n))$, vediamo un altro modo.

$\mathfrak{p} \supseteq Lie(P)$: Sappiamo che $W = \mathrm{Span}\{e_1, \dots, e_m\}$ è un P-sottomodulo di $\mathbb{C}^n$, per come sono fatte le matrici di P (perché hanno tutte entrate uguali a zero nel blocco in basso a sinistra. Allora

W dev'essere anche un $Lie(P)$-sottomodulo, cioè anche le matrici di $Lie(P)$ devono avere zeri nel blocco in basso a sinistra.
Segue: $Lie(P) \subseteq \mathfrak{p}$.
$\underline{Lie(P) \supseteq \mathfrak{p}}$: questa inclusione si dimostra come al solito con l'esponenziale.

Es. 3: $U \cap W$ è un sottomodulo contenuto in W.

Es. 4: Questo è un fatto standard di teoria delle rappresentazioni.

$\underline{(1) \Rightarrow (2)}$ | Sia $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ con V_i irriducibile $\forall i$.
Sia U somma di alcuni V_i, tale che $U \cap W = \{0\}$, e massimale rispetto a queste proprietà (eventualm. U può essere $\{0\}$ che interpretiamo come somma di nessun V_i).
Dim. che $V = U \oplus W$. Abb. $U \cap W = \{0\}$ per costruzione, va dim. che $V = U + W$. Dim. che $V_i \subseteq U + W$ $\forall i$.
Se V_i appare fra quelli scelti per U, allora $V_i \subseteq U + W$.

Sia allora V_i che <u>non</u> appare nella somma che dà U.

Dall'esercizio precedente sappiamo che $V_i \cap (U+W) \in \{V_i, \{0\}\}$.
Se $V_i \cap (U+W) = V_i$ allora $V_i \subseteq U+W$. Supp. per assurdo
$V_i \cap (U+W) = \{0\}$. Allora vale $(U \oplus V_i) \cap W = \{0\}$,
perché se $w = u+v$ con $w \in W$, $u \in U$, $v \in V_i$ allora
$V_i \ni v = w - u \in U + W$ quindi $v = 0$, $w = u$, e $w = 0$ perché
$U \cap W = \{0\}$. Quindi $U \oplus V_i$ soddisfa le condizioni che
definivano U e contiene strettam. U: assurdo.
Quindi $V = U \oplus W$.
(Oss. che la stessa dim. vale in dimensione infinita e con un
numero infinito di addendi, usando il lemma di Zorn.)

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ Se $V = \{0\}$ allora è completam. riducibile, quindi
poss. supporre $V \supsetneq \{0\}$. Allora V ha sottomoduli non nulli (es. V
stesso). Sia V_1 sottomodulo non nullo minimale, allora V_1 è
irriducibile (se V_1 contenesse sottomoduli diversi da $\{0\}$ e da V_1 non sarebbe
minimale). Per ipotesi esiste $U \subseteq V$ sottomodulo con

$$V = V_1 \oplus U$$

Per induzione sulla dimensione, U è completam. riducibile, sia allora

$$U = V_2 \oplus \dots \oplus V_n \quad \text{con } V_i \text{ sottomodulo irriduc. } \forall i \in \{2, \dots, n\}$$

Segue $V = V_1 \oplus \_ \oplus V_n$.

Es. 5: $ad(e)(e) = 0$
$ad(e)(h) = [e, h] = -[h, e] = -2e$
$ad(e)(f) = h$

$\Rightarrow$ la matr. di $ad(e)$ è $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$ad(h)(e) = [h, e] = 2e$
$ad(h)(h) = 0$
$ad(h)(f) = [h, f] = -2f$

$\Rightarrow$ matr. di $ad(h)$ è $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$ad(f)(e) = -h$
$ad(f)(h) = -[h, f] = -(-2f) = 2f$
$ad(f)(f) = 0$

$\Rightarrow$ matr. di $ad(f)$ è $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Es. 6: Dobb. dim. che

$$\tilde{\varphi} : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V^*)$$
$$x \longmapsto \underbrace{\left(\eta \mapsto \underbrace{(v \mapsto \eta(-x.v))}_{x.\eta}\right)}_{\tilde{\varphi}(x)}$$

è omom. di algebre di Lie.

Intanto $\underset{\tilde{\varphi}(x)(\eta)}{x.\eta}$ è un'applicaz. lineare $V \to k$ (verifica immediata).

Quindi effettivam. $\tilde{\varphi}(x)$ è un'applicazione $V^* \longrightarrow V^*$.

Poi, $\tilde{\varphi}(x)$ è lineare, anche questa verifica è immediata

(es. $\tilde{\varphi}(x)(\eta_1 + \eta_2) : v \longmapsto (\eta_1 + \eta_2)(-x.v)$ uguali

$\tilde{\varphi}(x)(\eta_1) + \tilde{\varphi}(x)(\eta_2) : v \longmapsto \eta_1(-x.v) + \eta_2(-x.v)$

da cui $\tilde{\varphi}(x)(\eta_1 + \eta_2) = \tilde{\varphi}(x)(\eta_1) + \tilde{\varphi}(x)(\eta_2)$.)

Quindi effettivam. $\tilde{\varphi}(x) \in \mathfrak{gl}(V^*)$.

Infine, $\tilde{\varphi}$ è lineare, cioè ad es. $\tilde{\varphi}(x+y) \overset{(?)}{=} \tilde{\varphi}(x) + \tilde{\varphi}(y)$, perché dati $\eta \in V^*$ e $v \in V$ abb.

$$\left(\tilde{\varphi}(x)(\eta)\right)(v) + \left(\tilde{\varphi}(y)(\eta)\right)(v) = \eta(-x.v) + \eta(-y.v) =$$

$$= \eta\left(-(x+y).v\right) =$$

$$= \left(\tilde{\varphi}(x+y)(\eta)\right)(v)$$

Rimane da verificare $\tilde{\varphi}([x,y]) \overset{(?)}{=} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } \mathfrak{gl}(V^*)}}{[\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(y)]} \left(= \tilde{\varphi}(x) \circ \tilde{\varphi}(y) - \tilde{\varphi}(y) \circ \tilde{\varphi}(x)\right)$ $\forall x, y \in L$

Siano allora $\eta \in V^*$, $v \in V$:

$$\left(\tilde{\varphi}([x,y])(\eta)\right)(v) = \eta\left(-[x,y].v\right) \underset{\uparrow}{=} \eta\left(-\left(x.(y.v) - y.(x.v)\right)\right) = \ldots$$

perché $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$, $x \mapsto (v \mapsto x.v)$ è omom. di alg. di Lie

$$= -\eta\left(x.(y.v)\right) + \eta\left(y.(x.v)\right)$$

$$\left(\left(\tilde{\varphi}(x) \circ \tilde{\varphi}(y)\right)(\eta)\right)(v) = \left(\tilde{\varphi}(x)\left(\tilde{\varphi}(y)(\eta)\right)\right)(v) =$$

$$= \left(\tilde{\varphi}(y)(\eta)\right)(-x.v) = \eta\left(-y.(-x.v)\right) = \eta\left(y.(x.v)\right)$$

e $\left(\left(\tilde{\varphi}(y) \circ \tilde{\varphi}(x)\right)(\eta)\right)(v) = \ldots = \eta\left(x.(y.v)\right)$

Quindi la verifica è completa.

Da dim.:

Es. 7: $ad : L \to gl(L)$

$$x \longmapsto \left(\begin{array}{l} ad(x) : L \to L \\ \quad y \mapsto [x,y] \end{array}\right)$$

è rappresentaz. di L.

Intanto: 1) $ad(x)$ è lineare $L \to L$ per ogni x (ovvio dalla bilin. di $[-,-]$)

2) $x \mapsto ad(x)$ è lineare $L \to gl(L)$, ovvio dalla bilinearità di $[-,-]$.

Infine, va dim. che $ad([x,y]) \overset{(?)}{=} [ad(x), ad(y)] = ad(x) \circ ad(y) - ad(y) \circ ad(x)$

$\forall x, y \in L$

Sia $z \in L$:

$ad([x,y])(z) = [[x,y],z]$

$(ad(x) \circ ad(y))(z) = ad(x)\left(ad(y)(z)\right) = [x,[y,z]]$

$(ad(y) \circ ad(x))(z) = \quad \dots = [y,[x,z]]$

Quindi dobb. dim. che $[[x,y],z] \overset{(?)}{=} [x,[y,z]] - [y,[x,z]]$

vero per l'ug. di Jacobi.

Es. 8: Abb. visto che V è un $sl(2)$-modulo irriducibile, e sappiamo che $SL(2)$ è connesso, quindi V è anche un $SL(2)$-modulo irriducibile.

Es. 9: (1) Dato W, definiamo $U = W^\perp$. Allora $U \oplus W = \mathbb{R}^n$, va dim. che U è un G-sottomodulo.

Siano $u \in U$, $g \in G$, $w \in W$, allora

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{prod. scalare} \\ \text{std di } \mathbb{R}^n}}{\langle w, \varphi(g) u \rangle} \underset{\text{perché } \varphi(g)^{-1} \in O(n, \mathbb{R})}{=} \langle \varphi(g)^{-1} w, \varphi(g)^{-1} \varphi(g) u \rangle =$$

$$= \langle \underbrace{\varphi(g^{-1}) w}_{\in W}, \underset{\in W^\perp}{u} \rangle = 0$$

Segue: $\varphi(g) u \in U \quad \forall u \in U$, cioè U è un G-sottom.

(2) Basta usare l'eserc. 4.

Es. 10: (1) Uguale alla dim. per $sp(n)$.

(2) Sia $X \in so(A)$, allora

$$Y = M X M^{-1} \in so(M A {}^tM)$$

infatti $\quad Y \cdot M A {}^tM + M A {}^tM {}^tY =$

$$= M X \cancel{M^{-1}} \cdot \cancel{M} A {}^tM + M A {}^tM {}^t(M X M^{-1}) =$$

$$= M\, XA\, {}^tM + MA\, \cancel{{}^tM} \cdot \cancel{{}^tM^{-1}}\, {}^tX\, {}^tM =$$

$$= M\, XA\, {}^tM + MA\, {}^tX\, {}^tM = M(XA + A\, {}^tX)\, {}^tM = 0$$

Viceversa, se $Y \in so(MA\,{}^tM)$ allora $X = M^{-1} Y M \in so(A)$ (verifica simile). Allora

$$\begin{aligned} so(A) &\longrightarrow so(MA\,{}^tM) \\ X &\longmapsto MXM^{-1} \end{aligned}$$

è biiettiva e lineare in X. E' isom. di algebre di Lie,

perchè $[MXM^{-1}, MX'M^{-1}] = M[X, X']M^{-1}$.

(3) $X = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = (c_{ij})_{i,j}$ $\quad {}^tX = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = (c_{ji})_{i,j}$

$$XJ = \begin{pmatrix} c_{1n} & \cdots & c_{12} & c_{11} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{nn} & \cdots & c_{n2} & c_{n1} \end{pmatrix} = (c_{i,\, n-j+1})_{i,j}$$

$$J\,{}^tX = \begin{pmatrix} c_{1n} & \cdots & c_{nn} \\ & & \\ c_{11} & \cdots & c_{n1} \end{pmatrix} = (c_{j,\, n-i+1})_{i,j}$$

$XJ + J\,{}^tX = 0$ implica $c_{i,\, n-j+1} = -c_{j,\, n-i+1} \quad \forall i,j$

cioè $c_{i,j} = -c_{n-j+1,\, n-i+1} \quad \forall i,j$:

$i \backslash j$	1	2		n
1	$c_{1,1} = -c_{n,n}$	$c_{1,2} = -c_{n-1,n}$	$\cdots$	$c_{1,n} = -c_{1,n}$
2	$c_{2,1} = -c_{n,n-1}$	$c_{2,2} = -c_{n-1,n-1}$		$c_{2,n} = -c_{1,n-1}$
$\vdots$		$\vdots$		
n	$c_{n,1} = -c_{n,1}$	$c_{n,2} = -c_{n-1,}$	$\cdots$	$c_{n,n} = -c_{1,1}$

Questo vuol dire che X è antisimm. rispetto alla diag. principale:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n-1} & 0 \\ & & & & -c_{1,n-1} \\ & & & & \vdots \\ c_{n-1,1} & & & & -c_{12} \\ 0 & -c_{n-1,1} & \cdots & & -c_{11} \end{pmatrix}$$

Allora $\dim(so(J)) = \frac{n(n-1)}{2}$.